UNIVERSITETET I OSLO

Matematisk Institutt

EKSAMEN I:	**STK 1000 – Innføring i anvendt statistikk**
	Midtsemestereksamen
TID FOR EKSAMEN:	**Onsdag 15. oktober 2003, kl. 9:00–12:00**
HJELPEMIDLER:	**Læreboken, kalkulator**

Dette oppgavesettet utgjør den første av kursets to eksamener. Det inneholder syv oppgaver og er på tre sider. Kursets andre eksamen arrangeres mandag 1. desember s.å.

Oppgave 1

NORMALFORDELINGEN HAR SOM KJENT to parametre, en for senter (teoretisk middeltall) og en for spredning (teoretisk standardavvik). Disse er ofte notert henholdsvis μ og σ. Denne oppgaven handler om de tre normalfordelingstetthetene $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, der den første har parametrene $(0, 1)$ for (μ, σ), den andre har parametrene $(3, 1)$, mens den tredje har parametrene $(0, 4)$.

Oppgaven går ut på å lage en skisse av disse tre sannsynlighetstetthetene, i det samme diagram. Skissen trenger ikke være vakker, kunstferdig eller nøyaktig; poenget skal være å se på hvilke måter de tre normalfordelingene i hovedsak skiller seg fra hverandre. Marker på din tegning hvilken av kurvene som representerer hvilken tetthet.

Oppgave 2

ET DATAMATERIALE (riktignok konstruert for anledningen) har ni målinger, nemlig

$$11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.$$

(a) Hva blir gjennomsnitt (middeltall) og median, for dette datasettet?

(b) Beregn også standardavviket s.

(c) Hvordan blir gjennomsnitt og median (eventuelt) forandret, om den niende målingen er lik 1019, ikke 19?

Oppgave 3

«GOTT WÜRFELT NICHT», mente Albert Einstein (i et brev til Max Born). Det kan derimot vi gjøre. Anta at terningen som kastes er perfekt balansert, med lik sannsynlighet for hver av de seks mulige utfall, og at forskjellige kast med terningen resulterer i stokastisk uavhengige utfall.

(a) Du kaster terningen én gang. Hva er sannsynligheten for at utfallet blir et partall?

(b) Du kaster så terningen tre ganger på rad. Hva er sjansen for å få tre femmere?

(c) La X være antall ganger du må kaste terningen før du første gang får en sekser. Hva er sannsynligheten for at $X = 4$?

Oppgave 4

Er du lykkelig? En bestemt personlighetstest pretenderer å si noe om forsøkspersonenes grad av livskvalitet og lykke, ved å lage en kombinert score av svarene på forskjellige spørsmål. Testen er kalibrert slik at gjennomsnittsscore og standardavvik i «normalbefolkningen» er henholdsvis 50.0 poeng og 7.0 poeng. Dessuten har erfaring med testen godtgjort at normalfordelingen gir en god approksimasjon til den empiriske fordelingen av disse lykke-poengene.

(a) Hvor mange prosent av normalbefolkningen kan forventes å ha en lykke-score på minst 60.0 poeng?

(b) To tilfeldige personer tar testen, uavhengig av hverandre. Hva er sjansen for at begge skal score lavere enn 60.0 poeng? Hva er sjansen for at en av de to skal score høyere enn 60.0 og den andre lavere enn 60.0?

(c) Gi et intervall som er slik at nitti prosent (av normalbefolkningen) kan forventes å ha lykke-score innenfor dette intervallet.

(d) Du tar testen og scorer høyt – gratulerer. Du blir nysgjerrig på om du er blant de to prosent mest lykkelige i landet. Hvor på poengskalaen går denne grensen?

Oppgave 5

Hvordan blir været i morgen? På en meteorologisk stasjon har man over mange år registrert en rekke variable, relatert til temperatur, nedbør, vind osv. Ut fra disse har man laget en presis definisjon på «soldag». Databasen kan så anvendes til å lage en hyppighetstabell over de åtte mulige tre-dagers-sekvenser for ukedagene mandag-tirsdag-onsdag, av soldag (`S`) og ikke-soldag (`R`). Dette oversettes til en sannsynlighetstabell, som følger.

(S,S,S)	0.027
(S,S,R)	0.060
(S,R,S)	0.063
(S,R,R)	0.157
(R,S,S)	0.066
(R,S,R)	0.147
(R,R,S)	0.137
(R,R,R)	0.343

(a) Hva er sannsynligheten for at en vilkårlig mandag skal være en soldag?
(b) La X være antallet soldager i en vilkårlig valgt mandag-tirsdag-onsdag-sekvens. Finn sannsynlighetsfordelingen for X.
(c) Hva er det forventede antall soldager, i en vilkårlig valgt ukes mandag-tirsdag-onsdag-sekvens?
(d) Hva er sjansen for at det blir sol på onsdag, gitt at det var sol både mandag og tirsdag?
(e) Og hva er sjansen for at det blir sol på onsdag, gitt kun den opplysning at det var sol på tirsdag?

Oppgave 6

Hvordan revurderes sannsynligheter, i lys av ny kunnskap? Vi skal se på en slik problemstilling i et ganske enkelt og idealisert eksempel. Argumentene som kommer til anvendelse vil ha ganske generell gyldighet, også, heldigvis, i situasjoner som krever mer tid til refleksjon og omtanke enn det man har til rådighet under en tretimerseksamen ved Universitetet i Oslo.

Situasjonen er som følger: Det er to likt-utseende urner foran deg, hver av dem fylt med 10 kuler. Du vet på forhånd at en av dem har 9 hvite kuler og 1 sort kule, og at den andre har 2 hvite og 8 sorte, men du vet altså ikke hvilken som er av hvilken type. Du velger en urne tilfeldig, trekker en kule like tilfeldig, og denne viser seg å være hvit. Vi skal (om noen øyeblikk) frem til hvordan denne opplysningen influerer på sannsynlighetene. La B være denne begivenheten, at kulen som ble valgt er hvit. La videre A_H være den begivenhet at den urnen du har valgt er den med 9 hvite kuler og 1 sort kule, og, analogt, A_S være den begivenhet at urnen du valgte er den med 2 hvite og 8 sorte. Det er altså slik at $P(A_H) = P(A_S) = \frac{1}{2}$; dette er sannsynlighetene «på forhånd», *før* du kommer så langt at du faktisk observerer B.

(a) Finn de betingede sannsynlighetene $P(B \mid A_H)$ og $P(B \mid A_S)$.
(b) Finn sannsynlighetene $P(A_H \cap B)$ og $P(A_S \cap B)$. (Her står $A_H \cap B$ for den begivenhet at både A_H og B inntreffer, og analogt med $A_S \cap B$.)
(c) Finn de revurderte sannsynligheter $P(A_H \mid B)$ og $P(A_S \mid B)$.

Oppgave 7

Er det noe poeng i å smøre sin kroppsflate med dyre solbadoljer? Dette vil man undersøke, og femti sannhetssøkende studenter melder seg til tjeneste (mot betaling). De skal ligge på magen i tre klokketimer i god solstek, og en erfaren hudlege sammenligner ryggens tilstand før og etter soling. Vurder kort Plan I, som er at 25 tilfeldig valgte studenter bruker solbadoljen og de andre 25 ikke, mot Plan II, som er at samtlige 50 studenter bruker solbadoljen, men kun på den ene halvparten av ryggen (mens den andre halvparten av ryggen altså ikke smøres inn).