Numerisk løsning av differensiallikninger av orden 2

Sett av differensiallikninger

Forelesning uke 46 2005

MAT-INF1100

Differensiallikning av andre orden

(1) $y'' = F(x, y, y'), \quad y(0) = b_0, \quad y'(0) = b_1.$

Vi har formler for løsning når:

$$F = f(x) - py' - qy,$$

der p og q er konstante.
Ellers: Numerisk løsning (stort sett).

Omskrivning til 2 likninger av orden 1

Definerer $z = y' \Rightarrow$

$$y' = z,$$
$$z' = F(x, y, z),$$

med $y(0) = b_0$, $z(0) = b_1$.
Sett av likninger.

Generelt kan en likning av orden n gjøres om til n likninger av orden 1.

Dette er standard framgangsmåte ved numerisk løsning med initialverdier.

Eulers metode

Definerer

$$y_n \approx y(nh), \quad z_n \approx y(nh),$$

der h er inkrementet i metoden.

Initialbetingelser gir z_0, y_0.
Rekursjon fra $n-1$ til n:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = z_{n-1},$$

$$\frac{z_n - z_{n-1}}{h} = F((n-1)h, y_{n-1}, z_{n-1}).$$

Kompendium 8.1.2
I kompendiet er metoden skrevet med y_n og y'_n som ukjente.

Umiddelbart $y_n = y_{n-1} + hy'_{n-1}$.

Likning for ny y' utledes med Taylorpolynom

$$y'_n = y'_{n-1} + hy''_{n-1} = y'_{n-1} + F((n-1)h, y_{n-1}, z_{n-1}).$$

Eulers metode; eksplisitt form

Rekursjon fra $n-1$ til n:

$$y_n = y_{n-1} + hz_{n-1},$$

$$z_n = z_{n-1} + hF((n-1)h, y_{n-1}, z_{n-1}).$$

Testproblem med kjent løsning

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Løsning

$$y(x) = \cos(x).$$

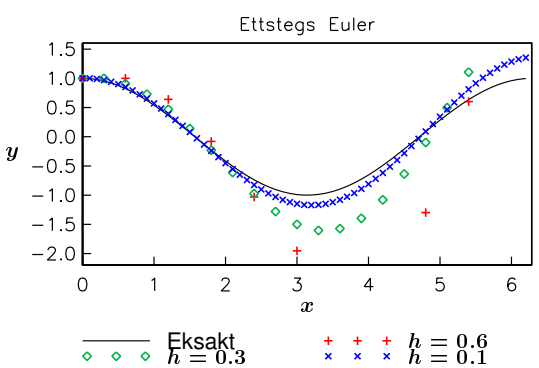
Ren svingning

Omskrivning

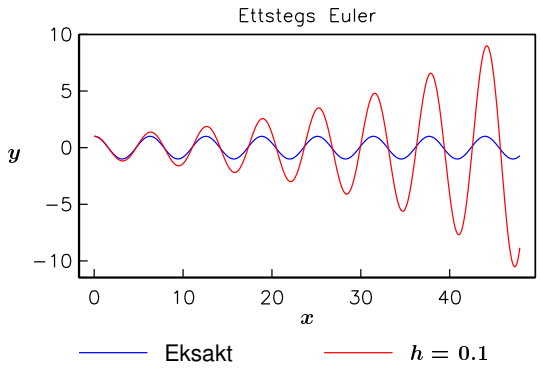
$$y' = z,$$
$$z' = -y,$$

med $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

Eulers metode



Eulers metode, større område



Observasjoner

Eulers metode brukes lite i praksis, bla.a. fordi

- Eulers metode er unøyaktig; selv liten h gir stor feil. Det er fordi vi bruker en ensidig differens for den deriverte.
- En svingende løsning, som den i eksemplet, behandles svært dårlig med Eulers metode: Den er instabil – feilen vokser over alle grenser.

Kan vi vise at Eulers metode er instabil i eksemplet vårt ?

Vårt eksempel og Eulers metode

$$y_n = y_{n-1} + hz_{n-1},$$
$$z_n = z_{n-1} - hy_{n-1}.$$

For $n > 0$ kan vi elimenere z'ene i den nederste vha. den øverste

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} = -y_{n-1}$$

Kommentar: differens for y'' insatt i $y'' = -y$.
Omskrivning:

$$y_{n+1} - 2y_n + (1 + h^2)y_{n-1} = 0.$$

Andre ordens differenslikning.

Løsning av differenslikning, I

Eulers metode betyr at vi løser (nummerer om)

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + (1 + h^2)y_n = 0, \quad n \geq 0.$$

Men denne kan vi løse i formel! Setter inn $y_n = r^n$

$$r^2 - 2r + 1 + h^2 = 0,$$

dvs

$$r_1 = 1 + \mathrm{i}h, \quad r_2 = 1 - \mathrm{i}h.$$

Løsning av differenslikning, II

Dette er tilfelle 3 i kap. 4 i Kalkulus.
Setning (4.1.14)

$$y_n = \rho^n \left(E\cos(n\theta) + F\sin(n\theta)\right),$$

der θ er arumentet til r_1 og

$$\rho = |r_1| = \sqrt{1 + h^2} > 1.$$

Løsning vokser over alle grenser når $n \to \infty$.

Eulers midtpunktmetode

Rekursjon fra $n - 1$ til n i to steg.

1: Mellomsteg; Eulers metode over $\frac{1}{2}\Delta x$

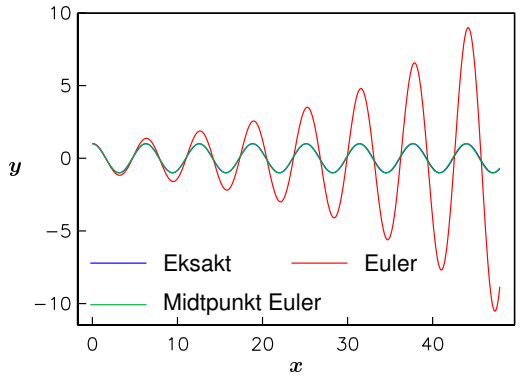
$$\hat{y} = y_{n-1} + \tfrac{1}{2}hz_{n-1},$$
$$\hat{z} = z_{n-1} + \tfrac{1}{2}hF((n-1)h, y_{n-1}, z_{n-1}).$$

2: Endelig steg

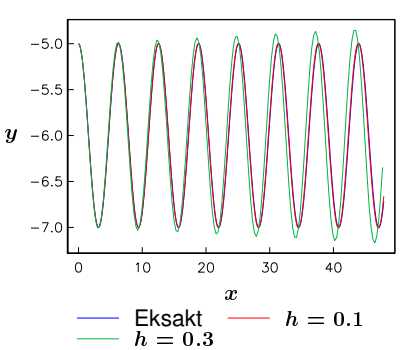
$$y_n = y_{n-1} + h\hat{z},$$
$$z_n = z_{n-1} + hF\left((n - \tfrac{1}{2})h, \hat{y}, \hat{z}\right).$$

En "kvasi-midtpunktformel" om $x = (n - \frac{1}{2})h$.

Sammenlikning for $h = 0.1$

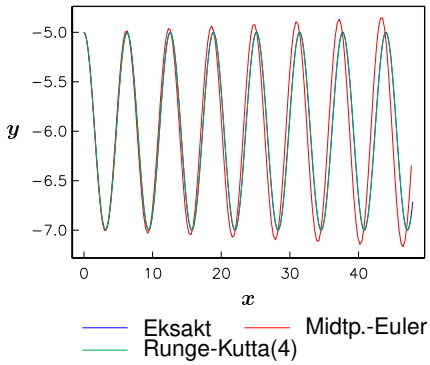


Midtpunkt Euler, konvergens



Stadig "litt" instabil.

M.-Euler, Runge-Kutta, $h = 0.3$



Eksakt
Midtp.-Euler
Runge-Kutta(4)