Differensiallikninger

Definisjoner og løsning i formel

Forelesning uke 45, 2005

MAT-INF1100

Differensiallikninger

Struktur i presentasjonen
Lysarkene gjennomgår hovedpunkter fra Kalkulus kap. 10.1-10.5 og 10.7.
Rekkefølgen er endret, spesielt er 10.7 flyttet fram.
Mye detaljer er utelatt selv om del viktige mellomsteg er inkludert.
Eksempler er bare tatt med i begrenset grad.
Henvisninger til feks. sats 10.3.2 i Kalkulus skrives *K. 10.3.2*.
Noen steder refereres likninger med navn.

Hva er en differensialikning?

En algebraisk likning har ett (eller flere) tall som ukjente. Eksempel:

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Løsningene $x = -2$ og $x = 3$ er de verdiene for x som oppfyller relasjonen.

En differensiallikning er en relasjon mellom en funksjon og dens deriverte. Funksjonen er den ukjente. Eksempel

$$y' + y = 0.$$

En løsning $y(x)$ oppfyller denne for alle x. Insetting $\Rightarrow$ $y(x) = e^{-x}$ er en løsning. Det er ikke feks. $y = x$ som oppfyller likningen bare for $x = -1$.

Hvorfor studere differensiallikninger ?

Differensiallikninger er helt sentrale for fysiske fag og ingeniørvitenskap.

Klasse av eksempler
Hvordan en tilstand endrer seg i tiden avhenger av tilstanden selv.
Kan tilstanden beskrives ved en funksjon av tiden, $y(t)$, kan endringen beskrives ved $y'(t)$ siden dette er endringsraten av y mhp. t. Resultatet er en relasjon mellom $y(t)$ og $y'(t)$.

Eksempel A: nedbrytning av radioaktivt stoff

Vi har en masse $M(t)$ av et radiokativt stoff. Hvert atom har en viss sannsynlighet for å forvandles (emmitere α eller β partikler) i et gitt tidsrom. Endringsraten av massen er da proposjonal med massen selv. Dersom vi starter med masse M_0 har vi det matematisk problemet

$$M' = -kM, \quad M(0) = M_0 \tag{1}$$

En differensiallikning for M i t og en initialbetingelse. k er avhengig av hvor radiokativt stoffet er.
K. eksempel 10.2.3.

Klassifisering: Første orden, lineær, konst. koeff., homogen.
Likninger av denne typen skal vi snart løse.

Eksempel B: Kjemisk reaksjon

Oksydasjon av nitrogenmonoksyd til nitrogendioksyd

$$2NO + O_2 = 2NO_2$$

To NO molekyler reagerer med ett O_2 til NO_2.
Konsentrasjoner: $C_{NO}(t)$, $C_{O_2}(t)$, $C_{NO_2}(t)$. (molekyler per volum)
Reaksjonsrate er proposjonal med $C_{NO}^2 C_{O_2}$ ($\sim$sannsynlighet for "sammenstøt" av 2 NO og ett O_2 molekyl).

$$\frac{\mathrm{d}C_{NO}}{\mathrm{d}t} = -kC_{NO}^2 C_{O_2},$$

der k er en konstant.
Det inngår ennå to ukjente.

Eksempel B forsetter

Bevaring av masse
Startkonsentrasjoner: $C_{NO}(0) = a$, $C_{O_2}(0) = b$
Massebevaring (V er totalt volum)

$$V(C_{NO} - a) = 2V(C_{O_2} - b),$$

som gir $C_{O_2} = B + \frac{1}{2}C_{NO}$ der $B = b - \frac{1}{2}a$.

Insatt i reaksjonslikning:

$$\frac{\mathrm{d}C_{NO}}{\mathrm{d}t} = -kC_{NO}^2(B + \frac{1}{2}C_{NO}), \quad C_{NO}(0) = a$$

Klassifisering: Første orden, ikkelineær, separabel (forklart senere)
Denne kan vi også "regne på".

Eksempel C: Bevegelse av partikkel

Newton's 2 lov, rettlinjet bevegelse

$$ma = F,$$

der m = masse, a = akselerasjon og F = kraft.
Posisjon gis som $y(t) \Rightarrow a \equiv \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$.
Hvis kraft avhenger av posisjon, hastighet og tid:
$F = F(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, t)$

Newton's 2 lov $\Rightarrow$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = F(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, t)$$

Differensiallikning av orden 2.

Eksempel C: Konkret tilfelle

Fallskjermhopperen fra kompendiet

Legeme i fritt fall (y måles vertikalt nedover)

$$F = \underbrace{mg}_{\text{tyngde}} - \underbrace{Cu^2}_{\text{luftmotstand}},$$

der fart $u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = g - \frac{C}{m}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

Klassifisering: Andre orden, ikkelineær, separabel (forklares siden)

Lineær, homogen likning av orden 1

Fraviker *K. kap.10.1*

$$y' + f(x)y = 0$$

Vi skriver den om til (fri variabel x)

$$\frac{1}{y}y' = -f(x)$$

som har form:

Funksjon av y ganger y' = funksjon av x

Likninger som kan skrives slik kalles separable

Fortsetter neste lysark

$$\frac{1}{y}y' = -f(x)$$

Vi integrerer begge sider mhp. x

$$\int \frac{1}{y}y'dx = -\int f(x)dx.$$

Poenget er at vi med en gang kan subsitituere $y'dx = dy$

$$\int \frac{1}{y}y'dx = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C,$$

der C er en integrasjonskonstant. Derved

$$\ln|y| + C = -\int f(x)dx$$

Lineær, homogen likning av orden 1, forts.

Anvender vi eksponensialfunksjonen på begge sider og bruker $e^{\ln|y|} = |y|$ og løser opp $|y|$

$$y = Ae^{-\int f(x)dx}$$

der A er en reell konstant. Entydig skrevet form kan vi få ved

$$y = Ae^{-\int_0^x f(\hat{x})d\hat{x}}$$

Initialbetingelse
Initialbetingensen $y(0) = y_0 \Rightarrow$

$$y = y_0e^{-\int_0^x f(\hat{x})d\hat{x}}$$

Eksplisitt formel dersom f integreres i formel

Separable likninger

Form *(K. kap. 10.7)*

$$q(y)y' = p(x).$$

Integrasjon gir $\int q(y)dy = \int p(x)dx$

Q og P antideriverte av hhv. q og $p \Rightarrow$

$$Q(y) = P(x) + C \qquad \text{(SI)},$$

der C er integrasjonskonstant.
Initialbetingelse $y(0) = y_0 \Rightarrow C = Q(y_0) - P(0)$
Løsning i formel forusetter

1. Q og P kan finnes
2. y må kunne løses fra (SI).

Trinn 1 og 2 kan utføres numerisk

Inhomogen, lineær likning av orden 1 *(K. kap. 10.3)*

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad \text{(IN)}$$

Knep: variasjon av parameteren
Vi skriver løsningen av (IN) $y(x) = v(x)u(x)$ der $u = e^{-\int f(x)dx}$ oppfyller den homogene delen $u' + f(x)u = 0$. Innsetting i (IN)

$$uv' + u'v + fuv = g$$

Fordi u løser den homogene likningen kansellerer de siste to ledd på venstre side

$$v' = \frac{g}{u} \Rightarrow v = \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx$$

Inhomogen, lineær likning av orden 1, forts.

For y kan vi da skrive *(K. 10.1.3)*

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + C\right),$$

Alle løsninger har denne formen. Dersom (IN) skal løses for $x \geq a$, med $y(a) = y_a$ utføres integraler fra a til x ($u = e^{-\int_a^x f(t)dt}$) og eneste mulig løsning er *(K. 10.3.1)*

$$y = e^{-\int_a^x f(\hat{x})d\hat{x}}\left(\int_a^x g(\hat{x})e^{\int_a^{\hat{x}} f(t)dt}d\hat{x} + y_a\right),$$

Vist: $y' + f(x)y = g(x) \quad , x \geq a, \quad y(a) = y_a$ har entydig løsning når f og g er integrerbare.

Andreordens, lineære likninger

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (H2)$$

Klassifisering: lineær, homogen, variable koeffisienter, orden 2.

Superposisjonering*(K. 10.4.1)*
Dersom y_1 og y_2 er løsninger av (H2) er $y = Cy_1 + Dy_2$, $C, D \in \mathbb{R}$, en løsning av (H2).

Når kan (H2) løses i formel?
Når koeffisientene er konstante og i noen få andre tilfeller

Konstante koeffisienter

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (K2),$$

der p og q er konstante.
Klassifisering: lineær, homogen, konstante koeffisienter, orden 2

Likning $y' + py = 0$ har løsning $y = Ae^{-pt} \Rightarrow$ vi prøver med $y = e^{rt}$ i (K2)

$0 = y''+py'+qy = r^2e^{rt}+pre^{rt}+qe^{rt} = (r^2+pr+q)e^{rt}$

$y = e^{rt}$ er løsning når r er nullpunkt i karakteristisk likning

$$r^2 + pr + q = 0$$

Minner om noe ? Differenslikninger.

Tilfelle 1; to reelle røtter, r_1, r_2 *(K. 10.4.3)*
Løsning $y = Ce^{r_1x} + De^{r_2x}$

Tilfelle 2; en reell rot, r_1 *(K. 10.4.8)*
Løsning $y = Ce^{r_1x} + Dxe^{r_1x}$

Tilfelle 3; to komplekse røtter r_1, $r_2 = \overline{r_1}$ *(K. 10.4.11)*
Løsning $y = e^{ax}(C\cos bx + D\sin bx)$
der $r_1 = a + ib$

Vi må se på

- Er løsningene fullstendige ?
  Vi har gjettet på en form og funnet de løsningene som har denne. Dette er ulikt behandlingen av førsteordenslikningen.
- Hvordan framkommer løsningen i tilfelle 2 ?
  Minner om tilsvarende tilfelle med differenslikninger.
- Formen på løsningen i 3

Er løsningene fullstendige ?

Bruker knep med variasjon av parameteren

Alle mulige løsninger kan skrives $y = uv$ der $u = e^{r_1x}$ er en løsning

Innsatt i likningen (K2)

$0 = y''+py'+qy = v(u''+pu'+qu)+uv''+(2u'+p)v',$

De 3 første ledd på høyre side kansellerer og

$v'' + (2\frac{u'}{u} + p)v' = 0$

Siden u er kjent og leddet med v er borte er dette en lineær førsteordenslikning for v'. Den kan vi løse

$v' = Ae^{-\int(2\frac{u'}{u}+p)dx} = Ae^{-2\ln|u|-px} = \frac{A}{u^2}e^{-px}$

Videre $v' = Ae^{-(2r_1+p)x}$ og $v = \hat{A}e^{-(2r_1+p)x} + B$

Er løsningene fullstendige ? Fortsettelse

For y finner vi så

$y = e^{r_1x}v = \hat{A}e^{-(r_1+p)x} + Be^{r_1x}$

Leddet med B er av samme form som u. Siden r_1 og r_2 oppfyller $r^2 + pr + q = 0$ har vi $p = -(r_1 + r_2) \Rightarrow$ $r_2 = -(p + r_1)$. Derved

$y = \hat{A}e^{r_2x} + Be^{r_1x}$

som viser at vi har den fullstendige løsningen i tilfelle 1.

Tilfelle 3 er i prinsippet likt, mens vi for tilfelle 2 viser fullstendighet sammen med at vi finner xe^{r_1x} delen.

Tilfelle 2

Fra innsetting av eksponensialformen har vi bare en uavhengig løsning. Vi bruker igjen variasjon av parameterenen $y = uv$ med $u = e^{r_1x}$. Får

$v' = Ae^{-(2r_1+p)x}$

Siden $r_2 = r_1$ følger

$v' = A \Rightarrow v = Ax + B$

Den generelle løsningen blir da $y = Axe^{r_1x} + Be^{r_1x}$

Tilfelle 3

Vi har $r_2 = \overline{r_1} = a + ib$. En komplekst evaluert funksjon $y = f(x) + ig(x)$ deriveres som $y' = f' + ig'$. Da er det klart at leddene i

$y = Ae^{(a+ib)x} + Be^{(a-ib)x}$

er kompleksevaluerte løsninger av differensiallikningen. Dersom $B = \overline{A} = \frac{1}{2}(C - iD)$ blir den reell og

$y = Ae^{(a+ib)x} + Be^{(a-ib)x} = e^{ax}(C\cos bx + D\sin bx)$

Sjekk ved innsetting!

Initialverdiproblem

(K. 10.4.4)

$$y'' + py' + qy = 0, \quad y(a) = d, \quad y'(a) = h,$$

har entydig løsning.

For tilfelle 1-3 gir initialbetingelsene 2 likninger for konstantene C og D som har entydig løsning.

Entydig løsning av andreordenslikning med initialbetingelser for funksjonsverdien og den førstederiverte er ikke begrenset til tilfeller med konstante koeffisienter.

Entydighet; tilfelle 1

Vi viser *K. 10.4.4* bare for tilfelle 1.
Den generelle løsningen

$y = Ce^{r_1x} + De^{r_2x},$

satt inn i $y(a) = d, \quad y'(a) = h$ gir

$$\begin{aligned} e^{r_1a}C &+ e^{r_2a}D &= d, \\ r_1e^{r_1a}C &+ r_2e^{r_2a}D &= h. \end{aligned}$$

Løsning ved eliminasjon$\Rightarrow$

$$C = \frac{dr_2 - h}{r_2 - r_1}e^{-r_1a}, \quad D = \frac{h - dr_1}{r_2 - r_1}e^{-r_2a},$$

som eksisterer så lenge $r_2 \neq r_1$.