

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i INF 3440 / INF 4440 — Signalbehandling

Eksamensdag: 8. desember 2003

Tid for eksamen: 09.00 – 12.00

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Formelsamling

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Dette oppgavesettet består av 4 oppgaver som kan løses uavhengig av hverandre. Skulle noe være uklart i en oppgave, så skriv klart hvilke forutsetninger du gjør for å løse oppgaven, og gå videre!

Skriv klart og tydelig! Pass på å begrunne / underbygge svarene med relevant teori. På alle skisser / plott skal tilhørende verdier på aksene komme tydelig frem.

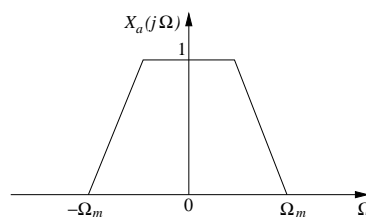
I vedlegget er det vist noen resultater som kan vise seg å være nyttige.

Oppgave 1 Sampling og nedsampling

Vi har gitt et båndbegrenset signal $x_a(t)$ med en kontinuerlig-tid Fourier transform $X_a(j\Omega)$ som er symmetrisk om $\Omega = 0$, gitt for $\Omega \geq 0$ ved

$$X_a(j\Omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_m/2 \\ 2 - \frac{2\Omega}{\Omega_m}, & \frac{\Omega_m}{2} < \Omega \leq \Omega_m \\ 0, & \Omega > \Omega_m. \end{cases}$$

En skisse av $X_a(j\Omega)$ er vist i Figur 1. Signalet $x_a(t)$ samples så til sekvensen $x[n]$ med samplingsperioden $T = \pi/(2\Omega_m)$.



Figur 1: $x_a(t)$ vist i frekvensdomenet.

(Fortsettes på side 2.)

1a

Lag en skisse av $X(e^{j\omega})$ for $0 \leq \omega < 2\pi$.

1b

$x[n]$ nedsamples så med en faktor 4 til $x_d[n]$. Forklar sammenhengen mellom $X(e^{j\omega})$ og $X_d(e^{j\omega})$. Bruk dette til å lage en skisse av $|X_d(e^{j\omega})|$ for $0 \leq \omega < 2\pi$.

Oppgave 2 DTFT

Et LTI-system er gitt ved

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + bx[n], \quad y[n] = 0 \text{ for } n < 0.$$

2a

Bestem magnituden til frekvensresponsen $H(e^{j\omega})$ til systemet, samt impulsresponsen $h[n]$.

2b

Bestem b slik at $\max_{\omega} |H(e^{j\omega})| = 1$, og lag tilhørende skisse av $|H(e^{j\omega})|$.

2c

Hva blir utgangen fra systemet for store n dersom inngangen er

$$x[n] = 4 + 2 \cos\left(\frac{5\pi}{3}n + \frac{\pi}{6}\right)?$$

Oppgave 3 \mathcal{Z} -transformen**3a**

La $x[n]$ være en sekvens av lengde N . Sekvensen $y[n]$ defineres så ved

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n - kN]$$

Uttrykk $Y(z)$ ved \mathcal{Z} -transformen til $x[n]$. Hva er konvergensradien til $Y(z)$?

3b

La sekvensen $w[n]$ være gitt for $n \geq 0$ ved

$$w[n] = a^{\langle n \rangle_N},$$

hvor $\langle n \rangle_N = n \bmod N$. Finn \mathcal{Z} -transformen $W(z)$ til $w[n]$, og lag en skisse av dets pol-nullpunkts diagram for $a = 1/2$ og $N = 4$.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4 FIR-filter design

4a

Gitt frekvensresponsen $H_{\text{LP}}(e^{j\omega})$ til et ideelt lavpassfilter med kuttfrekvens ω_c , vis at

$$h_{\text{LP}}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty.$$

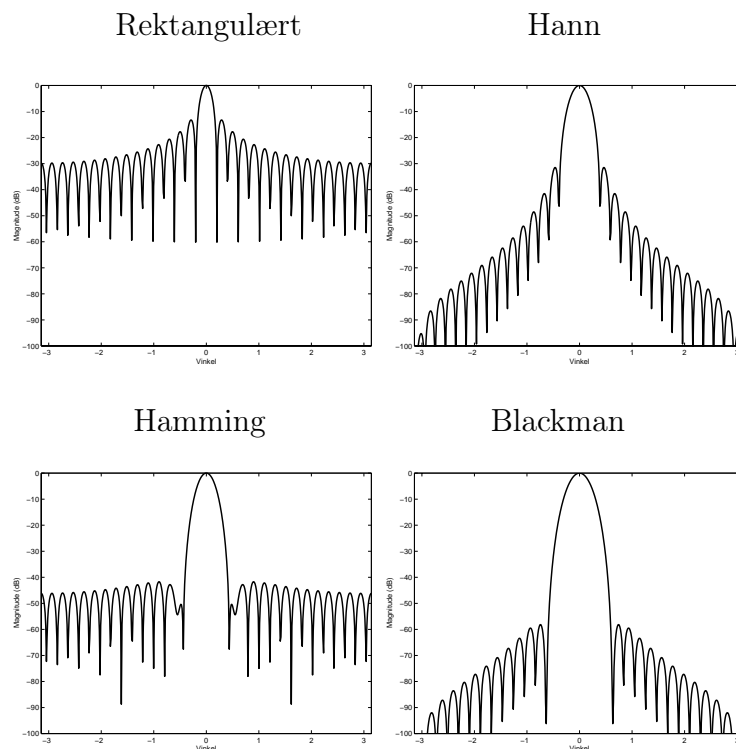
4b

For å få en FIR-tilnærming til det ideelle lavpassfilteret kan man legge på et vindu $w[n]$ med lengde $2M + 1$.

Utleid DTFTen $W_{\text{Rect}}(e^{j\omega})$ til et rektangulært vindu av lengde $2M + 1$, sentrert om $n = 0$.

4c

I Figur 2 er det vist DTFTen til noen vinduer. Med bakgrunn i modulasjonsteoremet, gi en kort begrunnelse for fordeler og ulemper ved bruk av de forskjellige vinduene.



Figur 2: Rektangulært, Hann, Hamming og Blackmann vindu for $M = 15$.

Lag to skisser som fremhever forskjellene i DTFT til det avkortede ideelle lavpassfilteret dersom man bruker henholdsvis et rektangulært og et Blackmann vindu.

Formelsamling

Eulers formel: Gitt ved

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta).$$

Summeformel: Gitt ved

$$\sum_{n=M_1}^{M_2} a^n = \frac{a^{M_1} - a^{M_2+1}}{1 - a}.$$

Konvolusjon: Mellom to sekvenser $x[n]$ og $y[n]$ gitt ved

$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n - k].$$

Z-transform: For en sekvens $x[n]$ gitt ved

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}.$$

DTFT / invers DTFT: For en sekvens $x[n]$ gitt ved henholdsvis

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad \text{og} \quad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega.$$

DFT: For en sekvens $x[n]$ av lengde N , gitt ved

$$X[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N - 1.$$

Sampling (CTFT \rightarrow DTFT): For et kontinuerlig-tid signal $x_a(t)$ gitt ved

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\frac{\omega}{T} + \frac{2\pi k}{T}\right).$$

STFT: For en sekvens $x[n]$ og et vindu $w[n]$ gitt ved

$$X_{\text{STFT}}(e^{j\omega}, n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n - m]w[m]e^{-j\omega m}.$$

Modulasjons-teoremet: Dersom $x[n] = x_1[n]x_2[n]$ er

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta.$$

Parsevals teorem: For en sekvens $x[n]$ gitt ved

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

Opp- / ned-sampling: DTFT til inngang / utgang med faktor L og M , gitt for en sekvens $x[n]$ ved henholdsvis

$$X_u(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}) \quad \text{og} \quad X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\omega-2\pi k)/M}).$$

Bilineær transformasjon: Fra s -planet til z -planet, gitt ved

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right).$$

Butterworth-filter: Av orden N og med 3 dB kuttfrekvens Ω_c , gitt ved

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}.$$