Obligatorisk oppgave 3 & 4
INF3170 våren 2004

Dette oppgavesettet skal guide dere gjennom viktige deler av pensum. Oppgavesettet inneholder ialt 20 deloppgaver. Hver deloppgave kan gi totalt 5 poeng, slik at max score er 100. For å få godkjent besvarelsen er det imidlertid nok å få 30 poeng totalscore, samt minst 2 poeng på minst 10 av oppgavene (en tilsvarende prestasjon på eksamen skulle være tilstrekkelig for å bestå!).

Oppgavene har stigende vanskelighetsgrad. De siste oppgavene står der for å gi dere utfordringer og angi nivået som kreves for å få A til eksamen. Skulle ambisjonsnivået være en del lavere enn en A, kan det være lurt å bruke tiden mot eksamen på kjernestoffet i faget og mer eller mindre glemme de siste 8 oppgavene i dette settet, det er nemlig fullt mulig å få en C uten å beherske alt dette stoffet. (Ikke alle spørsmål i de siste 8 oppgavene er imidlertid like vanskelige!)

Settet er obligatorisk, i den forstand at alle spørsmålene i settet kan komme igjen til eksamen. Når det er sagt, betyr det selvsagt ikke at hovedvekten av spørsmål på eksamen hentes fra de vanskeligste spørsmålene her - de vanskeligste spørsmålene i oppgavesettet (eller tilsvarende spørsmål) kan komme til de som har besvart de enklere spørsmålene så bra at de ligger an til å få en A. Ikke se på dette oppgavesettet som at alt er obligatorisk, se heller på det som en mulighet til å lære en masse nytt, og prøv å benytt muligheten så langt som tid og lyst strekker til. Vi anbefaler deg selvsagt å forsøke å gjøre så mye som mulig før innlevering. Dette gir nemlig en meget god oppvarming før eksamenslesingen.

Vi er svært takknemlig for tilbakemeldinger i kurskritikken på hvordan obligene har fungert!

1 Syntaks

Vi skal bruke samme definisjon av det førsteordens språket som Fitting kap. 5.1. Merk at språket brukes til å definerer termer og formler. Begge definisjonene er induktive og definisjonen av formler er bygget på definisjonen av termer.

Når vi viser generelle egenskaper ved formelle objekter som formler og termer, gjør vi det ofte ved induksjon over genereringen av objektene. Skal vi f.eks. vise at alle termer har balanserte paranteser, så viser vi det ved induksjon. I basis-steget ser vi på de enkleste termene: variable og konstanter. Disse har ingen paranteser, og derfor er alle parantesene i dem balanserte. I induksjonssteget tar vi for oss en term $f(t_1, \ldots, t_n)$. Det gjelder nå å finne en måte å gjøre bruk av induksjonshypotesen (IH) på. I dette tilfellet er det svært enkelt, siden termen inneholder $t_1, \ldots, t_n$ som *deltermer*, og vi kan bruke IH på hver av dem separat. IH sier at parantesene i hver term t_i er balanserte. Vi har nå ført argumentet til et punkt der vi gjerne må tenke litt for å kunne konkludere at hele objektet har den ønskede egenskap, men her er dette også svært enkelt, siden vi har lagt til en venstreparantes og en høyreparantes!

Oppgave 1

La $FV(A)$ betegne mengden av frie variable i formelen A. La σ være en substitusjon med endelig støtte D (finite support D, Fitting def. 5.2.6), og anta at $\sigma(x)$ er en grunnterm (dvs. variabelfri term) for alle $x \in D$. Du skal vise at hvis A er en formel, så er $A\sigma$ også en formel og at $FV(A\sigma) = FV(A) \setminus D$ [Husk at hvis B også er en mengde, betegner $B \setminus D$ en mengdedifferans!] Dette kan virke opplagt, men du skal vise at påstanden holder ved å føre et induksjonsbevis for den. Du må da først vise at en tilsvarende egenskap holder for alle termer og så vise at den holder for alle formler! ■

Oppgave 2

Angi det minste språket som følgende 5 uttrykk er formler i. Har alle formlene i dette språket en naturlig tolkning som sanne utsagn om tall?

A1: $\forall x\, (Sx \doteq Sy \rightarrow x \doteq y)$

A2: $\forall x\, (\neg(x \doteq 0) \rightarrow \exists y\, (x \doteq Sy))$

A3: $\forall x\, \neg(0 \doteq Sx)$

A4: $\forall x\, (0 \dot{+} x \doteq x)$

A5: $\forall x \forall y\, (x \dot{+} Sy \doteq S(x \dot{+} y))$

■

Merk: Vi indikerer at $\dot{+}$ og $\doteq$ er symboler i *objektspråket* ved å sette en prikk over symbolene. På den måten kan vi skille dem fra $+$ og $=$, som vi flittig bruker som symboler i *metaspråket*. Vi kunne f.eks. skrevet @ for $\dot{+}$ og ? for $\doteq$ i objektspråket, men da hadde den intenderte tolkningen av symbolene og formlene over blitt skjult.

2 Semantikk

Vi angir en tolkning $\langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$ slik som Fitting definerer det i Def. 5.3.1. Standardtolkningen av formlene i oppgave 2 kan vi angi som et tuppel $\langle \mathbb{N}, \varphi \rangle$ der

- Domenet $\mathbb{N}$ er $\{0, 1, 2, \dots\}$
- $\varphi(S) = S^\varphi$ er suksessorfunksjonen, dvs. $S^\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gitt ved $S^\varphi(n) = n + 1$
- $\varphi(\doteq) = \doteq^\varphi$ er identitetsrelasjonen, dvs. $\doteq^\varphi = \{(0,0), (1,1), (2,2), \dots\}$
- $\varphi(\dot{+}) = \dot{+}^\varphi$ er addisjonsfunksjonen, dvs. $\dot{+}^\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gitt ved $\dot{+}^\varphi(m, n) = m + n$

Oppgave 3

Du skal nå jobbe videre med språket fra oppgave 2 – la oss kalle det $\mathcal{L}$. Hvis vi ønsker å uttrykke mindre-enn-relasjonen i $\mathcal{L}$, kan vi gjøre dette uten å innføre et symbol for det i $\mathcal{L}$. Isteden kan vi bruke symbolene for addisjon og identitet til å kode inn mindre-enn-relasjonen, dvs. at vi kan finne en formel $\Phi(t_1, t_2)$ som er slik at $\Phi(t_1, t_2)$ er sann i standardtolkningen hvis og bare hvis $t_1^\varphi < t_2^\varphi$. Finn et uttrykk for formelen $\Phi(t_1, t_2)$. ■

Bmk: Selv om vi klarer å kode inn mindre-enn, så finnes det er lang rekke naturlige påstander om tall som vi ikke kan uttrykke i dette språket, uansett hvor flinke vi er til å kode. For eksempel kan vi ikke kode inn multiplikasjon.

Den neste oppgaven skal illustrere at vi bruker semantikk til å tolke språk, og at samme formler ofte kan betraktes som del av flere forskjellige språk, alt avhengig av hvilken synsvinkel vi anlegger. La oss si at en formel A i et første-ordens språk er *utsagnslogisk* hvis

1. A ikke inneholder kvantorene $\forall$ eller $\exists$.
2. A er lukket.

Oppgave 4

a) Skriv først ned en utsagnslogisk formel i språket over tall som inneholder minst 3 konnektiver. Formelen skal være sann i standardtolkningen, men den skal ikke være logisk gyldig. Du skal vise at den ikke er logisk gyldig ved å angi en motmodell (dvs. en tolkning som gjør den usann).

b) Mengden av utsagnslogiske formler i et første-ordens språk kan også karakteriseres som mengden av formler i et utsagnslogisk språk. La oss kalle dette utsagnslogiske språket for *det utsagnslogiske fragmentet* til det første-ordens språket. Vi tolker som kjent et utsagnslogisk språk ved hjelp av valuasjoner. Vis at det for enhver modell $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$ for et førsteordens språk finnes en *projisert* valuasjon for dets utsagnslogiske fragment, dvs. en valuasjon v slik at v og $\mathbf{M}$ gir enhver utsagnslogisk formel samme sannhetsverdi. Vis også at det for enhver valuasjon v av det utsagnslogiske fragmentet finnes en første-ordens modell $\mathbf{M}$ som v er en projeksjon av.

c) Vis at en utsagnslogisk formel i et første-ordens språk er logisk gyldig hvis og bare hvis den er en tautologi (når vi betrakter den som del av språkets utsagnslogiske fragment). Husk at en formel er en tautologi hviss enhver valusjon gjør den sann hviss alle rader i sannhetstabellen gjør den sann. ■

3 Sekventkalkylen

Vi skal nå utbygge sekventkalkylen som du jobbet med i forrige oblig med regler for kvantorer. Alle reglene fra forrige oblig skal fremdeles gjelde, i tillegg til følgende 4 regler:

$$\frac{\Gamma, A\{x/t\} \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash A\{x/a\}, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta}\ \mathsf{R}\forall$$

$$\frac{\Gamma, A\{x/a\} \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\exists \qquad \frac{\Gamma \vdash A\{x/t\}, \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta}\ \mathsf{R}\exists$$

For kvantorreglene gjelder det at parameteren a som innføres i $\mathsf{R}\forall$ og $\mathsf{L}\exists$ *ikke* må forekomme i noen formel i konklusjonen i regelen. a kalles en *egenparameter* og kan betraktes som et vitne på at $\exists$-formelen i antecedenten i konklusjonen i $\mathsf{L}\exists$-regelen er sann eller at $\forall$-formelen i succedenten i konklusjonen i $\mathsf{R}\forall$-regelen er usann. Merk at når vi innfører en ny egenparameter, så er sekventen i premisset til regelen uttrykt i et annet (dvs. større) språk enn sekventene som forekommer under premisset i bevistreet.

Oppgave 5

Gi først et bevis for sekventen $\exists x(Px \land Qx) \vdash \exists x Px$. Vis så at alle de 4 kvantorreglene bevarer gyldighet. Argumentet du bruker er det samme som brukes i beviset for en bestemt proposisjon hos Fitting. Hvilken? (Skriv hvilket nummer proposisjonen har i boka hans.) Konkluder at sekventkalkylen er sunn. ■

La oss nå si at en mengde formler Γ er *konsistente* dersom det ikke finnes enn endelig delmengde Γ' av Γ slik at sekventen $\Gamma' \vdash \bot$ er bevisbar i sekventkalkylen. Å vise konsistens ved å følge definisjonen mekanisk er ofte umulig, fordi det generelt er umulig å finne en terminerende algoritme som avgjør om en sekvent er bevisbar eller ikke. Men hvis vi kan bruke kreativitet og intuisjon istedenfor kun mekaniske operasjoner, er det ofte ganske greit å vise konsistens. Vi skal nå se på hvorfor.

Oppgave 6

Vis at en mengde Γ er konsistent hvis det finnes en modell som gjør alle formlene i Γ sanne samtidig. ■

Vi skal ikke gi sekventkalkyleregler for likhet, selv om det er enkelt å gjøre dette, og enkelt å vise at kalkylen da blir sunn. Du trenger imidlertid ikke å vite mer enn dette for å avgjøre at formlene A1-A5 er konsistente, simpelthen fordi standardmodellen opplagt er en modell for dem.

Oppgave 7

Ta utgangspunkt i formlene A1-A5, og se på

A6: $\forall x \forall y(\Phi(x,y) \to \exists z(\Phi(x,z) \land \Phi(z,y))$

der $\Phi(x,y)$ er formelen som uttrykker at x er mindre enn y. Vis først at A6 er konsistent med A1-A5, dvs. at de seks formlene A1-A6 samlet er konsistente. Vis så at negasjonen av A6 også er konsistent med A1-A5. ■

Oppgave 8

I forrige oppgave viste vi at A6 er det som kalles *logisk uavhengig* av A1-A5. Foreslå en definisjonen av at en formel er logisk uavhengig av en mengde med formler Γ. ■

4 Kompletthet via strategi for bevissøk

Vi skal nå se på et kompletthetsbevis for sekventkalkylen som utvider beviset for kompletthet for utsagnslogikken fra forrige oblig. Anta først at sekventen vi skal bevise ikke inneholder funksjonssymboler. Problemet er å angi en metode som er *"fair"*, dvs. at alle mulige trekk (ekspansjoner) blir utført i hver gren. Siden vi trenger kontraksjon på $\forall x A$ i antecedenten og på $\exists x A$ i succedenten, bruker vi de avledete reglene $\mathsf{LC}\forall$ og $\mathsf{RC}\exists$. Disse erstatter $\mathsf{L}\forall$ og $\mathsf{R}\exists$.

$$\frac{\Gamma, \forall x A, A\{x/t\} \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta}\mathsf{LC}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x A, A\{x/t\}, \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta}\mathsf{RC}\exists$$

Vi sier at $\mathsf{LC}\forall$ og $\mathsf{RC}\exists$ har prioritet 2 og at alle de andre *logiske* LK-reglene har prioritet 1. Algoritmen eksekverer nedenfra og oppover i hver gren og inndeles i *runder*. Hver runde begynner med at vi bruker prioritet 1-regler så lenge det er mulig. Denne prosessen kalles *steg 1.* Etter steg 1 vil løvnoden på enhver gren ha formen

$$\Gamma^{Atom}, \Gamma^{\forall} \vdash \Delta^{\exists}, \Delta^{Atom}$$

der $\Gamma^{Atom}, \Delta^{Atom}$ bare inneholder atomære formler, $\Gamma^{\forall}$ bare inneholder formler på formen $\forall xA$ og $\Delta^{\exists}$ bare inneholder formler på formen $\exists xA$.

La T være mengden av alle konstanter som forekommer på grenen. Hvis det ikke forekommer noen konstanter, sett $T = \{o\}$.

Steg 2: For enhver formel $\forall xA \in \Gamma^{\forall}$ (eller $\exists xB \in \Delta^{\exists}$) og enhver $t \in T$:

Hvis $\forall xA$ (eller $\exists xB$) ikke tidligere har blitt instansiert med t, gjør dette med regelen $\mathsf{LC}\forall$ (eller $\mathsf{RC}\exists$).

Når steg 2 er avsluttet, er runden avsluttet. Vi går inn i en ny runde hviss det er mulig å anvende en prioritet 1-regel på løvnodesekventen.

Oppgave 9

Vis hvordan strategien finner et bevis for $\forall x(Px \vee Qx), \exists x \neg Px \vdash \exists xQx$. Vis deretter hva som skjer når vi prøver å bevise $\forall x \exists y Pxy \vdash \bot$.

Teorem 4.1 (Motmodell-teoremet)

$\Gamma \vdash \Delta$ *ikke bevisbar i LK* $\quad$ $\Gamma \vdash \Delta$ *har en Herbrandmodell som motmodell.*

Dette resultatet (som ofte kalles Modelleksistensteoremet for LK – vi har gitt det et annet navn for å unngå forvirring i forhold til Fitting!) viser vi ved følgdene resonnement.

(1) Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er bevisbar i LK, så har den en motmodell.

dvs. at det finnes en tolkning som gjør samtlige formler i Γ sanne og samtlige formler i Δ usanne. Vi tenker oss at bevissøksmetoden genererer et objekt som "vokser og vokser" i hver gren så lenge vi ikke har funnet et aksiom. Prosessen gir opphav til et *grenseobjekt* δ_ω som kan ha uendelig lange grener. δ_ω er åpen hvis den har en åpen gren, dvs. en gren som ikke inneholder et aksiom. Obsever:

(2) Hvis sluttsekventen ikke er bevisbar, så har δ_ω en åpen gren.

For hvis δ_ω ikke er åpen, så vil hver gren ha et aksiom og pr. konstruksjon være endelig. Men da er δ_ω et bevis for sluttsekventen. Vi skal vise at

(3) Hvis δ_ω har en åpen gren, så har sluttsekventen en motmodell.

Merk: (1) følger fra (2) og (3), dvs. at når vi har vist (3), er vi ferdige med kompletthetsbeviset. Vi bruker snitt i beviset:

$$\frac{(2)\ A \vdash C \quad (3)\ C \vdash B}{(1)\ A \vdash B}$$

der

$$\begin{aligned}
A &= \text{Sluttsekventen er ikke bevisbar}\\
B &= \text{Sluttsekventen har en motmodell}\\
C &= \delta_\omega \text{ har en åpen gren}
\end{aligned}$$

og C er snittformel.

Vi viser (3):

La β være en åpen gren i δ_ω. La

β^+ være mengden av alle formler med antecedentforekomst i β og
β^- være mengden av alle formler med succedentforekomst i β.

Oppgave 10

Spesifiser en Herbrand-modell som gjør alle atomære formler i β^+ sanne og alle atomære formler i β^- usanne. Argumenter for at modellen er veldefinert, dvs. at den ikke prøver å tilordne samme atomære formel både verdien sann og verdien usann. ■

Vi fortsetter nå kompletthetsbeviset og induserer over formlene i $\beta^+ \cup \beta^-$ for å vise at alle formlene i β^+ blir sanne og alle formlene i β^- blir usanne i den Herbrandmodellen du har definert.

<u>Basissteg:</u> $P\vec{t}$ atomær. Hvis $P\vec{t} \in \beta^+$, er den sann pr. definisjon av β^+. Hvis $P\vec{t} \in \beta^-$, så er $P\vec{t} \notin \beta^+$ fordi β er åpen.

<u>Induksjonssteg:</u> Vi må har ta for oss hver av formelkonstruksjonene $\forall xA$, $\exists xA$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$ og $\neg A$. For hver formelkonstruksjon F må vi ta for oss de to tilfellene der $F \in \beta^+$ og $F \in \beta^-$. Vi skal her bare se på allkvantoren; eksistenskvantoren blir helt dual (og dermed enkel), mens konnektivene blir som for utsagnslogikk.

Vi antar først at $\forall xA \in \beta^+$. Da må $A\{x/a\} \in \beta^+$ for enhver a i D. For a har blitt generert i en eller annen runde i søket, og siden $\forall xA$ alltid kopieres videre, må vi ha instansiert denne formelen med a i en senere runde.

Induksjonshypotesen gir oss at for hver a er $A\{x/a\}$ sann. *Sannhetsbetingelsen* gir oss at $\forall xA$ er sann, siden $A\{x/a\}$ er sann for alle termer a og mengden av termer er lik mengden av objekter i domenet.

Oppgave 11

Anta at $\forall xA \in \beta^-$. Bruk egenskaper ved β, sannhetsbetingelsen og induksjonshypotesen til å argumentere for at $\forall xA$ er usann i Herbrandmodellen. Argumentet du bruker er det samme som brukes i beviset for en bestemt proposisjon hos Fitting. Hvilken? ■

Det følger nå umiddelbart at LK er komplett:

Teorem 4.2 (Kompletthetsteoremet)

$$\Gamma \models \Delta \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \Delta \textit{ er bevisbar i LK.}$$

Oppgave 12

Anta nå at vi har vist at vi kan få en komplett kalkyle ved å innføre regler for likhet i LK. For å vise denne oppgaven må du bruke det du har vist både om sunnhet, konsistens og kompletthet.

Vis at hvis en mengde formler har en modell, så har de en modell med et tellbart[1] domene. Er det mulig å angi en mengde formler i første-ordens logikk som bare har de reelle tall som modell? ■

5 Uendelig utsagnslogikk

I denne seksjonen skal vi se på et helt nytt språk. Målet med dette er at dere ved å jobbe med dette språket skal bli tvunget til å tenke gjennom hovedpunktene i pensum enda en gang, samt at dere skal se et nytt bevis for kompakthet.

La I være en *tellbar* mengde. Vi definerer to nye konnektiver

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge\ i : I \mid A_i & \text{evt.} & \bigwedge\ i \geq n \mid A_i \\ \bigvee\ i : I \mid A_i & \text{evt.} & \bigvee\ i \geq n \mid A_i \end{array}$$

der A_i er en formel for hver $i \in I$. Vi kan nå uttrykke i vårt språk at f.eks. $A_1, A_2, \dots$ alle er sanne ved formelen

$$\bigwedge\ i : \{1, 2, \dots\} \mid A_i$$

Vi kan utvide den utsagnslogiske LK-kalkylen ved å gi regler for å behandle de nye formlene. Disse reglene er annerledes enn de vi har sett før, siden to av dem gir bevistreet uendelig forgrening. Vi krever imidlertid at et bevis kun har endelig lange grener, selv om det kan være uendelig mange av dem. Vi får følgende LK-regler:

$$\frac{\Gamma, A_n, \bigwedge\ i \geq n+1 \mid A_i \vdash \Delta}{\Gamma, \bigwedge\ i \geq n \mid A_i \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\wedge i$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_n, \Delta \quad \Gamma \vdash A_{n+1}, \Delta \quad \Gamma \vdash A_{n+2}, \Delta \quad \dots}{\Gamma \vdash \bigwedge\ i \geq n \mid A_i, \Delta}\ \mathsf{R}\wedge i$$

$$\frac{\Gamma, A_n \vdash \Delta \quad \Gamma, A_{n+1} \vdash \Delta \quad \Gamma, A_{n+2} \vdash \Delta \quad \dots}{\Gamma, \bigvee\ i \geq n \mid A_i \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\vee i$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_n, \bigvee\ i \geq n+1 \mid A_i, \Delta}{\Gamma \vdash \bigvee\ i \geq n \mid A_i, \Delta}\ \mathsf{R}\vee i$$

Vi ser at $\mathsf{R}\wedge i$ og $\mathsf{L}\vee i$ gir en potensielt uendelig forgrening og at $\mathsf{L}\wedge i$ og $\mathsf{R}\vee i$ gir opphav til en potensielt ikke-terminerende prosess i bevissøket.

La oss se på et eksempel. Gitt en formelmengde $\{A_1, A_2, \dots\}$ og sekventen

$$\neg(\bigwedge\ i \geq 1 \mid A_i)\ \vdash\ (\bigvee\ i \geq 1 \mid \neg A_i)$$

Vi setter opp et bevis slik:

[1] En *tellbar mengde* er en endelig mengde eller en uendelig mengde der elementene i mendgen kan settes i en én-til-én korrespondanse med de naturlige tallene. Enhver delmengde av de naturlige tall er f.eks. tellbar, mens mengden av reelle tall ikke er det.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{A_1 \ \vdash \ A_1, (\bigvee \ i \geq 2 \mid \neg A_i)}}{\vdash \ A_1, \neg A_1, (\bigvee \ i \geq 2 \mid \neg A_i)}\ \mathsf{R}\neg}{\vdash \ A_1, (\bigvee \ i \geq 1 \mid \neg A_i)}\ \mathsf{R}\vee i \qquad \dots \qquad \dfrac{\begin{matrix} \dfrac{\dfrac{\times}{A_k \ \vdash \ A_k, \neg A_1, \dots, A_{k-1}, (\bigvee \ i \geq k+1 \mid \neg A_i)}}{\vdash \ A_k, \neg A_1, \dots, \neg A_k, (\bigvee \ i \geq k+1 \mid \neg A_i)}\ \mathsf{R}\neg \\ \cdot \\ \mathsf{R}\vee i \ k \text{ ganger} \\ \cdot \end{matrix}}{\vdash \ A_k, (\bigvee \ i \geq 1 \mid \neg A_i)} \qquad \dots}{\vdash \ (\bigvee \ i \geq 1 \mid \neg A_i), (\bigwedge \ i \geq 1 \mid A_i)}\ \mathsf{L}\wedge i}{\neg(\bigwedge \ i \geq 1 \mid A_i) \ \vdash \ (\bigvee \ i \geq 1 \mid \neg A_i)}\ \mathsf{L}\neg
$$

Merk: Hver gren i beviset er endelig lang og begynner med et aksiom.

Oppgave 13

Skriv ned en definisjon av sannhetsbetingelsene for de nye formlene og vis at de nye LK-reglene bevarer gyldighet. ■

Oppgave 14

En formel er på negasjons normalform (NNF) når den bare inneholder konjunksjoner, disjunksjoner (endelige eller uendelige) og negasjoner, og der hver negasjon ikke har noen andre konnektiver innenfor seg. Angi en metode for å transformere en formel til NNF, og argumenter for at NNF-formelen du kommer frem til er logisk ekvivalent med den du startet med. ■

Teorem 5.1 *LK med regler for uendelig utsagnslogikk er sunn.*

Beviset for sunnhet blir som før ved induksjon over oppbygningen av bevis. Basissteget er fremdeles greit, siden hver gren begynner med et aksiom. Induksjonssteget er også greit fordi LK-reglene for uendelig utsagnslogikk bevarer gyldighet.

Teorem 5.2 *LK med regler for uendelig utsagnslogikk er komplett.*

Beviset for kompletthet blir som før, men vi må nå sikre oss at vi får brukt alle de andre reglene for vi går i løkke med $\wedge\, i/\vee\, i$! Søkestrategien må ta hensyn til dette.

Oppgave 15

Skriv ned en søkestrategi og bruk den til å bevise Motmodell-teoremet for det nye systemet. ■

La nå A være en formel uten uendelig konjunksjon. La A^n fremkomme fra A ved å erstatte enhver disjunksjon

$$\bigvee \ i \geq m \mid B_i$$

i A med den *endelige* formelen

$$B_m \vee B_{m+1} \vee \cdots \vee B_{m+n}.$$

Teorem 5.3 (Endelighetsteoremet) *En formel A på NNF uten uendelige konjunksjoner er gyldig hviss $\exists n(A^n$ er gyldig).*

Bevis: "Hvis"-veien er opplagt. Vi kan bare legge til en uendelig rekke $\bigvee\ i \geq n+1 \mid B_i$ av formler som vi ikke bruker i beviset for $\vdash A$. Beviset for $\vdash A$ er vi sikret på grunn av kompletthet.

Oppgave 16

Bevis "bare hvis"-veien av Endelighetsteoremet. Du må bruke kompletthetsteoremet og observere at forutsetningene i teoremet sikrer at bevisobjektene blir endelige. ■

Teorem 5.4 (Kompakthetsteoremet) *La Γ være en tellbar mengde av formler i det vanlige språket for utsagnslogikk, dvs. at Γ ikke inneholder noen uendelige konnektiver. Hvis enhver endelig delmengde av Γ er oppfyllbar, så er Γ oppfyllbar.*

Oppgave 17

Bevis Kompakthetsteoremet. Hint: Anta først at Γ *ikke* er oppfyllbar og la $\Gamma = \{A_1, A_2, \dots\}$. I beviset resonnerer vi omkring Γ i det uendelige språket, dvs. at vi bruker et større språk i beviset for Kompakthetsteoremet enn det språket som teoremet sier noe om! Betrakt formelen $\vDash \neg \bigwedge\ i \geq 1 \mid A_i$. Prøv å kom frem til at $A_1, \dots, A_n \vDash \bot$ for et tall n, dvs. at den *endelige* mengden $\{A_1, \dots, A_n\}$ ikke er oppfyllbar. Konkuder at dette viser Kompakthetsteoremet. ■

6 Mer om kompakthet og konsistensegenskaper

Modelleksistensteoremet i Fitting er mer abstakt enn vår behandling over fordi det abstraherer fra en gitt søkestrategi. Men hans teorem er også av den grunn sterkere. Nå får du tre oppgaver derfra. To av dem går inn i detaljer i hans konstruksjon, og er nyttige øvingsoppgaver. Den siste oppgaven gir et eksempel på hva vi kan bruke Kompakthetsteoremet til.

Oppgave 18

En av de tekniske problemene som Fitting må løse oppstår når han skal vise at enhver konsistensegenskap kan utvides til en konsistensegenskap med endelig karakter. Han løser dette ved å innføre en alternativ konsistensegenskap. Vis at en alternativ konsistensegenskap kan utvides til en av endelig karakter, men at argumentet for dette ikke går gjennom hvis vi antar at konsistensegenskapen ikke er alternativ. ■

Oppgave 19

Fitting oppgave 5.9.1 side 134. ■

Oppgave 20

Fitting oppgave 5.9.2 side 134. ■